თავი IV

სიმრავლეთა თეორიის მნიშვნელობა. სიმრავლის ცნება. ზოგადი როგორც ცვლადი. ფუნქციონალური დამოკიდებულება. ფუნქციონალური კავშირის მიზეზობრივ კავშირთან გაიგივების უსაფუძვლობა (მახის კრიტიკა). სასრული და უსასრულო სიმრავლეები. ფ. ენგელსი და ვ. ი. ლენინი „ცუდი უსასრულობის შესახებ“. რიცხვის ცნების განვითარება სიმრავლეთა თეორიასთან დაკავშირებით. ნამდვილ რიცხვთაგან შემდგარი სიმრავლე როგორც უწყვეტობის არითმეტიკული გამოხატულება და კოორდინატთა იდეის არსი. ალბათობათა აღრიცხვა. დიდ რიცხვთა კანონი და მისი ონტოლოგიური ასპექტი. ალბათობის თეორიის მნიშვნელობა. სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსები

მე-20 საუკუნეში მათემატიკის პრობლემატიკამ თვისებრივად ახალი სახე მიიღო. ძირითადი ფაქტორი, რომელმაც განაპირობა მთელი ეს ცვლილებანი, იყო მე-19 საუკუნის ბოლოს გ. კანტორის მიერ სიმრავლეთა თეორიის შექმნა. თუ აქამდე უსასრულობის ცნება განიხილებოდა შემოუსაზღვრელად ზრდად (ან კლებად) სიდიდეებთან მიმართებაში, ახლა, სიმრავლეთა თეორიის შექმნის შემდეგ, უსასრულობაზე მსჯელობა დაიწყეს სიმრავლეებთან დაკავშირებით. უსასრულო სიმრავლის ცნების შემოტანით მათემატიკაში დაიწყო რევოლუცია. გ. კანტორმა აჩვენა, რომ მის მიერ შემოტანილ სიმრავლეთა ზოგადი , აბსტრაქტული თეორია შეიძლება საფუძვლად დაედოს მთელ მათემატიკას. სიმრავლეთა თეორია შეიჭრა მათემატიკის ყველა სფეროში. სიმრავლეთა თეორიის საფუძველზე შესაძლებელი გახდა მთელი მათემატიკური ანალიზის გარდაქმნა. დედეკინდის, ვეიერშტრასისა და კანტორის შრომების მიხედვით მოხერხდა ირაციონალური რიცხვის ცნების ზუსტი განმარტება, რის შედეგადაც მათემატიკურმა ანალიზმა მკაცრად დაფუძნებული სახე მიიღო. დღითი დღე მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორიისათვის იშლებოდა ფართო ასპარეზი. შეიქმნა მთელი რიგი ახალი მათემატიკური დისციპლინებისა, რომელნიც უშუალოდ იყვნენ დამყარებულნი სიმრავლის ცნებაზე: სიმრავლეთა თეორია, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია (ინტეგრალის თეორია, ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორია, წყვეტილ ფუნქციათა ზოგადი თეორია და სხვ.), თეორიული ტოპოლოგია, ფუნქციონალური ანალიზი. დღიდან თავიანთი წარმოშობისა ამ მათემატიკურმა დისციპლინებმა მეცნიერთა დიდი ყურადღება მიიპყრეს. ყოველივე ამის გამო გასაკვირი აღარ არის, რომ მე-20 საუკუნის მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორიის ღრმა დამუშავების საკითხი ერთ-ერთ ცენტრალურ პრობლემად დადგა.

სიმრავლეთა თეორიის ძირითად ცნებას თვით ს ი მ რ ა ვ ლ ი ს ცნება წარმოადგენს. ეს ცნება მათემატიკაში განსაზღვრული არ არის. ითვლება, რომ მისი შინაარსი ინტუიციურად არის გასაგები ყველასათვის ანუ ყველამ იცის, თუ რაზეა საუბარი სიმრავლის ცნების მეშვეობით. ჩვენ დასაწყისში განვიხილეთ უკვე ეს ცნება, როგორც მათემატიკურ ცნებათა ტიპიური მაგალითი და აღვნიშნეთ, რომ „სიმრავლის" ცნება გამოხატავს საგანთა გარკვეულ ერთობლიობას. შეგვიძლია ვილაპარაკოთ საგანთა სხვადასხვა ერთობლიობაზე; საგნებს, რომელნიც სიმრავლეებში მონაწილეობენ, სიმრავლის ელემენტები ეწოდებათ. სიმრავლის ელემენტები ნებისმიერად შეიძლება იქნეს არჩეული ისე, რომ სრულიადაც არ იყოს გათვალისწინებული ამ ელემენტებს შორის არსებული რეალური დამოკიდებულება. სიმრავლის ცნება იძლევა მდგომარეობის გარეგან, საერთო რაოდენობრივ დახასიათებას. თუ სიმრავლე სასრულია, მაშინ სიმრავლის განსაზღვრა შესაძლოა მასში შემავალი ელემენტების უბრალო ჩამოთვლით. მაგრამ შესაძლოა სიმრავლე უსასრულოც იყოს. უსასრულო სიმრავლის დახასიათება კი მასში შემავალ საგანთა ჩამოთვლის საფუძველზე შეუძლებელია, რადგან ელემენტთა ჩამოთვლის პროცესი ამ დროს დაუსრულებელ ხასიათს ატარებს. უსასრულო სიმრავლე შეიძლება განისაზღვროს იმ საერთო ნიშანზე მითითებით, რომელიც მასში შემავალი ელემენტებისთვისაა დამახასიათებელი. როდესაც რაიმე სიმრავლეზე ვლაპარაკობთ, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ყოველი საგნის მიმართ სწორია ერთი და მხოლოდ ერთი შედეგი ორი შესაძლებლობიდან: ეს საგანი ან შედის ჩვენს სიმრავლეში, როგორც მისი ელემენტი, ან არა.

სიმრავლის ცნებით უძველესი დროიდან სარგებლობდნენ როგორც მათემატიკოსები, ისე ფილოსოფოსები. ამასთან დაკავშირებით ყურადღება მივაქციოთ ორი ტიპის საკითხებს: ერთნი დაკავშირებულნი არიან კარდინალური რიცხვის ცნებასთან და, აქედან გამომდინარე, ეხება უსასრულობის ცნებასაც, ხოლო მეორენი ეხებიან მხოლოდ კუთვნების და ჩართვის ცნებებს და წარმოადგენენ სილოგიზმის საფუძველს (7, 37). მე-19 საუკუნის ბოლომდე სიმრავლის ცნების განსაზღვრაზე არ იყო გამახვილებული სერიოზული ყურადღება. მე-19 საუკუნეში, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, გ. კანტორმა შექმნა სიმრავლეთა თეორია და წამოაყენა სიმრავლის განმარტება: სიმრავლის ქვეშ იგულისხმება ერთმანეთისგან ჩვენ მიერ ინტუიტიურად და აზრობრივად კარგად განსხვავებულ ობიექტთა ერთობლიობა (7, 38). ერთი შეხედვით, სიმრავლის ცნების ასეთ განმარტებაში არ უნდა ჰქონდეს თითქოს ადგილი რაიმე გაუგებრობას. მაგრამ ძალიან მალე სიმრავლეთა თეორიასთან დაკავშირებით მათემატიკაში შეიქმნა პარადოქსული ვითარება, რამაც განაპირობა ძლიერი კრიზისი მის საფუძველზე. გნოსეოლოგიური თვალსაზრისით, მათემატიკის განვითარების ეს პერიოდია სწორედ საინტერესო.

როდესაც ლაპარაკია რაიმე სიმრავლეზე, იგულისხმება, რომ სიმრავლის ელემენტებს ახასიათებს გარკვეული მთლიანობა და ინდივიდუალურობა, ე. ი. არ დაიშვება, რომ სიმრავლის ელემენტები დაიყონ ნაწილებად, ანდა, პირიქით, შეერთდნენ ახალი მთელის სახით. ასევე, სიმრავლის ელემენტები აუცილებლად უნდა განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან, რადგან აზრი არა აქვს ისეთ სიმრავლეზე ლაპარაკს, რომელშიც ერთი და იგივე ელემენტი რამდენჯერმე შედის.

ავიღოთ ახლა რაიმე ზოგადი ცნება, რომლის შესაბამისი ცალკეული საგნები ქმნიან სიმრავლეს, მაგალითად: სამკუთხედი, ხე, სკამი და ა. შ. შესაბამის ცალკეულთა სიმრავლეები იქმნებიან: სამკუთხედთა სიმრავლე, ხეთა სიმრავლე, სკამების სიმრავლე და ა. შ. თვით ზოგადი ცალკეულთა მიმართ შეიძლება განიხილოს როგორც ცვლადი, რომლის მნიშვნელობებიც ეს ცალკეულები იქნებიან. ცალკეულთა სიმრავლე წარმოადგენს ცვლადის ცვალებადობის არეს. ჩვენ ადრეც გვქონდა საუბარი იმაზე, თუ რას ნიშნავს ცვლადის განსაზღვრა თავისი მნიშვნელობების საშუალებით; რომ არ უნდა გავიგოთ ისე, თითქოს ცალკეული საგნები ცვლადის მაგივრობას სწევენ, ცალკეული საგნები გამოავლენენ ცვლადს, ცვლადი სწორედ ამ გამოვლენაში ისაზღვრება. ეს არის ის დიალექტიკური მომენტი, რომელიც ცვლადთან დაკავშირებით შემოვიდა მათემატიკაში და რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს სიმრავლეთა თეორიის გააზრებისათვის. ისეთ ცვლად საგნებს, რომელთა ცალკეული მნიშვნელობანი რიცხვებს წარმოადგენენ, ცვლადი სიდიდეები ეწოდება.

ცვლადის ცნებასთან დაკავშირებით მათემატიკაში შემოვიდა ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნება. განვიხილოთ ეს დამოკიდებულება. ვთქვათ, გვაქვს ცვლადი საგანი, აღვნიშნოთ იგი x-ით, და გარკვეული წესი, რომლის საშუალებითაც x-ის ამ მნიშვნელობაზე მოცემული წესის მიხედვით ჩატარებული ოპერაციის შედეგი. მაშინ მივიღებთ წყვილთა გარკვეულ სიმრავლეებს, სადაც მეორე წევრი შეიძლება იყოს ან ერთი და იგივე საგანი, ან სხვადასხვა საგანი. იმ შემთხვევაში, როდესაც მეორე წევრებად იქნება სხვადასხვა საგანი, შეგვიძლია შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი, რომლის მნიშვნელობები იქნება x-ზე გარკვეული ოპერაციის ჩატარების შედეგად მიღებული წევრები. აღვნიშნოთ ეს ცვლადი y-ით, თუ განვიხილავთ ახლა (x, y) წყვილებს, დავინახავთ, რომ x-ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება y-ის გარკვეული მნიშვნელობა. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ y ცვლადი x ცვლადის ფუნქციას წარმოადგენს. ეს აღინიშნება ასე: $y=f(x)$. x ცვლადს ფუნქციის არგუმენტს ან დამოუკიდებელ ცვლადს უწოდებენ. ეს ნიშნავს იმას, რომ x ცვლადის მნიშვნელობანი სხვა ცვლადთან დამოკიდებულებით არ მიიღება. y ცვლადს კი დამოკიდებული ეწოდება, რადგანაც მნიშვნელობანი x-გან დამოკიდებულებით მიიღება. ის ოპერაცია კი, რომელსაც დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობებიდან გადავყავართ დამოკიდებული ცვლადის

მნიშვნელობებზე, აღინიშნება სიმბოლოთი *f*. *f(x)* გამოხატავს უკვე ამ ოპერაციას, წარმოებულს *x*-ზე, რის შედეგადაც მივიღებთ *y*-ს. ასე მაგ., x^2, $(x+1)^3$ და სხვ. პირველ შემთხვევაში ოპერაცია, რომელიც *x*-ის მნიშვნელობებიდან გადაგვიყვანს *y*-ის მნიშვნელობებზე, არის კვადრატში აყვანა, მეორე შემთხვევაში ერთის მიმატება და კუბში აყვანა და სხვ. თითოეულ შემთხვევაში ყოველი *x*-ისთვის მივიღეთ შესაბამის *y*-ს.

ფუნქციის ცნების საშუალებით გამოიხატება ბუნების მოვლენებს შორის არსებული ბევრი დამოკიდებულება. ფუნქციონალურ ხასიათს ატარებს, მაგალითად, ძალისა და აჩქარების დამოკიდებულება, განვლილი მანძილის დამოკიდებულება დროისაგან და სხვ. მაგრამ უნდა აღვნიშნოთ, რომ ფუნქციონალური დამოკიდებულების არსებობა ყოველთვის არ ნიშნავს და არ გამოხატავს მიზეზობრივი კავშირის არსებობას. მართალია, მიზეზ-შედეგის კავშირი ფუნქციონალურ ხასიათს ატარებს, მაგრამ ყველა ფუნქციონალური კავშირი მიზეზობრივი კავშირი არ არის (შევადაროთ, მაგალითად, ერთმანეთს $\vec{F} = \vec{ma}$ და $S=\pi r^2$ ან წრეხაზის სიგრძე $=2\pi r$). ე. ი. ფუნქციონალური კავშირი არ უნდა გავაიგივოთ მიზეზ-შედეგის კავშირთან; ანუ ის ფაქტი, რომ *x*-ზე გარკვეული ოპერაციის ჩატარების შედეგად მიიღება *y*, ჯერ კიდევ არ ნიშნავს იმას, რომ *y* არის *x*-ის მიზეზი. იგი იძლევა მხოლოდ *x*-ისა და *y*-ის ურთიერთმიმართების გარეგან დახასიათებას. მართალია, ფუნქციონალური კავშირის დადგენა აადვილებს მიზეზ-შედეგობრივი კავშირის შესწავლას, მაგრამ ფუნქციონალური კავშირის დადგენით ჯერ კიდევ არ დგინდება ბუნების მოვლენათა შორის არსებული ურთიერთმიმართების არსი; საჭიროა კვლევის შემდგომი გაგრძელება და ამ კავშირის თვისებრივი ხასიათის შესწავლა. მიზეზობრივი კავშირის ფუნქციონალურ კავშირზე დაყვანის ცდას საფუძვლად უდევს სწორედ მოვლენის თვისებრივი მხარის იგნორირება, რომელსაც, თავს მხრივ, მეცნიერული ცოდნის მხოლოდ აღწერითი ხასიათის აღიარებამდე მივყავართ და საბოლოოდ, სუბიექტივისტურ იდეალისტურ თვალსაზრისში გამოიხატება (მახი).

f(x) ფუნქციის ცნება დაკავშირებულია (*x*, *y*) წყვილების განხილვასთან. შეიძლება ითქვას, რომ (*x, y*) წყვილი წარმოადგენს ცვლადს, რომელსაც შეესაბამება ცალკეულ წყვილთა მთელი სიმრავლე. ამ სიმრავლის ელემენტებში (წყვილებში) კომპონენტების ადგილების გადანაცვლებით მივიღებთ ახალ სიმრავლეს (*y, x*) ცვლადის მნიშვნელობების სახით. ისმის კითხვა, შეიძლება თუ არა, რომ ამ სიმრავლეთა საფუძველზე განისაზღვროს გარკვეული φ(*y*) ფუნქცია. ამ შემთხვევაში მოხდება დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ცვლადების როლების შეცვლა. აშკარაა, რომ ზოგადად არ იქნება ყოველთვის შესაძლებელი ისეთი ფუნქციის განსაზღვრა, რომლითაც განხორციელდება ისეთივე კავშირი ცვლადებს შორის, რაც

$f(x)$ ფუნქციის დროს. მაგალითად, თუ გვაქვს ისეთი ფუნქცია: x^2, მაშინ, მართალია, ყოველ x-ს შეესაბამება გარკვეული y, მაგრამ ყოველი y-ისთვის აღარ გვექნება უკვე x-ის გარკვეული მნიშვნელობა, არამედ x-ის ორ განსხვავებულ მნიშვნელობასთან გვექნება საქმე. ასეთ შემთხვევაში კი (y, x) ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლეზე არ მოხერხდება $\varphi(y)$ ფუნქციის განსაზღვრა. $\varphi(y)$ ფუნქცია განისაზღვრება მხოლოდ იმ შემთხვევაში (ანუ $\varphi(y)$ ფუნქცია იარსებებს მხოლოდ მაშინ), თუ არ ექნება ადგილი y-ს მნიშვნელობათა განმეორადობას, ანუ თუ x-ის განსხვავებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება y-ის განსხვავებული მნიშვნელობანი. მაშინ y-ის აღებული მნიშვნელობისთვის ყოველთვის გვექნება x-ის ერთადერთი მნიშვნელობა და ფუნქცია $\varphi(y)$ იარსებებს. $\varphi(y)$ შებრუნებულ ფუნქციას უწოდებენ, $f(x)$ ფუნქციას კი პირდაპირი ეწოდება. ცხადია, რომ *f და φ* ოპერაციები განსხვავდებიან ერთმანეთისგან. მაგალითად, თუ $f(x)$ არის $3x+5$, მაშინ $\varphi(y)$ იქნება $\frac{y-5}{3}$. რა თქმა უნდა, პ ი რ დ ა პ ი რ ი და შ ე ბ რ უ ნ ე ბ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ი ს ც ნ ე ბ ა ფარდობით ხასიათს ატარებს. ანუ ერთი ფუნქცია პირდაპირია ან შებრუნებული მხოლოდ მეორე ფუნქციასთან მიმართებაში. ცალკე აღებული ერთი ფუნქციისათვის კი ამ ცნებებს აზრი არა აქვთ.

თუ $f(x)$ ფუნქცია $\varphi(y)$-ის შებრუნებულია, მაშინ შესაძლებელია არა მხოლოდ x-ის გარდასახვა y-ში, არამედ აგრეთვე y-ის გარდასახვა x-ში. ასეთ შემთხვევაში გარდასახვას ურთიერთცალსახას უწოდებენ.

გარდასახვა, რომელიც ფუნქციის საშუალებით ხორციელდება, ეხება ფუნქციის დამოკიდებულ და დამოუკიდებელი ცვლადებით წარმოდგენილ სიმრავლეებს. აღვნიშნოთ x ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე A-თი, ხოლო y ცვლადის მნიშვნელობათა სიმრავლე B-თი, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $f(x)$ A სიმრავლეს გარდასახავს B სიმრავლეში. თუ ფუნქცია შებრუნებულია, მაშინ შებრუნებულია B სიმრავლის გარდასახვა A სიმრავლეში. ე. ი. A სიმრავლის ყოველ ელემენტს ეთანადება B სიმრავლის რაიმე ელემენტი და პირიქით. ასეთ დამოკიდებულებას სიმრავლეებს შორის ე კ ვ ი ვ ა ლ ე ნ ტ უ რ ო ბ ი ს დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ე ბ ა ს უ წ ო დ ე ბ ე ნ.

როდესაც გვაქვს სხვადასხვა სიმრავლე, შესაძლებელია მათი შედარება. მაგალითად, შეიძლება ვთქვათ, რომ ერთი სიმრავლე მეტია მეორეზე ან პირიქით. თუ სიმრავლეები სასრულოა, შეიძლება უბრალოდ დავთვალოთ მათში შემავალი ელემენტების რაოდენობა და ამის საფუძველზე მოვახდინოთ შემდგომში მათი შედარება, მაგრამ ამ ხერხს უსასრულო სიმრავლეების შესადარებლად ვერ გამოვიყენებთ. ამიტომ სიმრავლეების შესადარებლად შემოაქვთ მეთოდი, რომელშიც გამოიყენება სწორედ „ურთიერთცალსახა“ თანადობის ცნება. ავიღოთ, მაგალითად, ორი A და B სიმრავლე. A იყოს ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტთა სიმრავლე, ხოლო

B – ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტური ბილეთების სიმრავლე. ცხადია, რომ A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი, და ყოველი ელემენტი B სიმრავლიდან არის შესაბამისი A სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტისა, ე. ი. აღნიშნულ სიმრავლეებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. ასეთ დროს ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს აქვთ ერთნაირი სიმძლავრე; ანუ ისინი ტოლძალოვანი სიმრავლეები არიან. ამრიგად, შესაძლებელია სიმრავლეთა შედარება სიმძლავრის მიხედვით, ანუ, როგორც ამბობენ, კარდინალური რიცხვის მიხედვით.

აღსანიშნავია, რომ ურთიერთცალსახა თანადობა შეიძლება არსებობდეს უსასრულო სიმრავლეებს შორისაც. მაგალითად, ჯერ კიდევ გალილეიმ შენიშნა, რომ ერთი ერთზე მიმართება არსებობს მთელ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლესა: 1, 2, 3, 4, ... n, ... და ამ რიცხვთა კვადრატების სიმრავლეს: 1, 4, 9, 16, ... m^2 ... შორის.

ამბობენ, რომ: 1. ორი A და B სიმრავლე ერთმანეთს ემთხვევა ($A=B$), თუ: $A \subset B$ და $B \subset A$.

2. ორი A და B სიმრავლე ეკვივალენტურია ($A \sim B$), თუ მათ ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება. ასეთი სიმრავლეები ტოლძალოვანია და ამბობენ, რომ მათ აქვთ ერთი და იგივე კარდინალური რიცხვი, ე. ი. ერთი და იგივე კარდინალური რიცხვი აქვთ სიმრავლეებს მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი ერთმანეთის ეკვივალენტურია. აშკარაა, რომ მიმართება ($A \sim B$) არის „რეფლექსური“, „სიმეტრიული“ და „ტრანზიტული“. ე.ი. ნებისმიერი A, B, C, სიმრავლეების შემთხვევაში“ $A \sim A$, თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$, თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$.

სიმრავლეებზე შეიძლება ჩატარდეს შემდეგი მოქმედებანი: შეკრება, ანუ გაერთიანება, გამრავლება, ანუ თანაკვეთა, სხვაობა და სხვ. ორი A და B სიმრავლის ჯამი ეწოდება ისეთ $A+B$ სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი A და B სიმრავლიდან ერთ-ერთს მაინც მიეკუთვნება. A და B სიმრავლეების ნამრავლი ანუ კვეთა ეწოდება ისეთ $A \cdot B$ სიმრავლეს, რომელიც შედგება ორივე A და B სიმრავლის საერთო ელემენტებისაგან. ორი A და B სიმრავლის სხვაობა ეწოდება $A - B$ სიმრავლეს, რომელიც შედგება იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც შედიან A-ში და არ შედიან B სიმრავლეში, შეიძლება ითქვას, რომ რაიმე A სიმრავლისა და მისი A_1 ქვესიმრავლის სხვაობა ნაწილი იქნება A სიმრავლისა; ე. ი $A - A_1 \subseteq A$. იმ შემთხვევაში და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $A_1 \supseteq A$, მაშინ $A_1 + (A - A_1) = A$. ორ A და B სიმრავლეს არ ექნება საერთო თანაკვეთა, თუ მათ არ გააჩნიათ საერთო ელემენტები, ე. ი. $A \cdot B = 0$, მაგალითად, A_1 და $A - A_1$ სიმრავლეებს თანაკვეთა არ აქვთ.

როდესაც საქმე ეხება სასრულო სიმრავლეებს, მათი განსაზღვრა შეიძლება მათში შემავალი ელემენტების უბრალო ჩამოთვლის გზითაც. უსასრულო სიმრავლეების ასეთნაირი გზით განსაზღვრა კი შეუძლებელია. უსასრულო სიმ-რავლე შეიძლება განისაზღვროს მხოლოდ მისი შემადგენელი ელემენტებისათვის დამახასიათებელ საერთო ნიშანზე მითითებით. ასე მაგალითად, ყველა შესაძლო სამკუთხედთა სიმრავლე, ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და სხვ. ამავე დროს საჭიროა აღინიშნოს, რომ უსასრულო სიმრავლე ისევე შემეცნებადია, როგორც სას-რულო და მცდარია აზრი, რომლის მიხედვითაც თითქოს შემეცნებას ექვემდებარება მხოლოდ სასრულო სიმრავლეები. ამის შესახებ კარგად წერდა ფ. ენგელსი თავის წიგნში „ბუნების დიალექტიკა“, სადაც იგი საფუძვლიანად აკრიტიკებდა აზრს მხოლოდ სასრულის შეცნობადობის შესაძლებლობის შესახებ (1, 280).

უსასრულობის შეცნობადობის შესაძლებლობა გამომდინარეობს უსას-რულობის შესახებ არასწორი თვალსაზრისისგან, რომელიც უსასრულობას განიხილავს სასრულოსაგან სრულიად მოწყვეტილად და განცალკევებულად. ვ. ი. ლენინი აღნიშნავდა, რომ სასრულობასთან თვისებრივად ასეთნაირად დაპირისპირებული უსასრულობა „ცუდი უსასრულობაა“, იგი მოწყვეტილია და გამიჯნულია თავისი რეალური საფუძვლიდან. სასრულოსა და უსასრულოს შორის არსებობს ღრმა დიალექტიკური კავშირი (4, 105).

პირველად გალილეიმ მიაქცია ყურადღება იმას, რომ უსასრულო სიმრავლე შეიძლება გარდასახული იყოს თავის გარკვეულ ნაწილში. ამბობენ, რომ ერთი სიმრავლე მეორის ნაწილია, თუ პირველი სიმრავლის ყოველი ელემენტი არის, ამასთანავე, ელემენტი მეორე სიმრავლისა. ყველა სიმრავლეს აქვს ნაწილები, ანუ ქვესიმრავლეები. ავიღოთ, მაგალითად, სამი ელემენტისაგან შემდგარი A სიმრავლე: $\{a, b, c\}$. მის ქვესიმრავლეები იქნებიან: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ და სადაც $\{\varnothing\}$ ცარიელი სიმრავლეა. შეიძლება ითქვას, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა. $\{a, b, c\}$ ქვესიმრავლეს უწოდებენ არაჭეშმარიტ ქვესიმრავლეს, მაშინ, როდესაც დანარჩენი ქვესიმრავლეები ჭეშმარიტ ქვესიმრავლეებად განიხილება. კანტორის თეორემის თანახმად, რაიმე სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის სიმძლავრე მეტია, ვიდრე თვით ამ სიმრავლის სიმძლავრე. მაგალითად, ჩვენ მიერ განხილულ მაგალითში სიმრავლის სიმძლავრე =3, ხოლო A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის სიმძლავრე კი არის $2^3=8$. ე. ი. ზოგადად, ნებისმიერი n სიმძლავრის მქონე სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის სიმძლავრე იქნება 2^n. ამავე დროს, A სიმრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლის სიმძლავრე ნაკლებია ან ტოლია თვით A სიმრავლის სიმძლავრეზე.

გალილეიმ განიხილა შემდეგი სიმრავლეები: მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლე (A) და მთელ დადებით რიცხვთა კვადრატებისაგან შემდგარი სიმრავლე (B).

A 1, 2, 3, 4, … n, …

B 1, 4, ,9, 16, … n^2, …

და შენიშნა, რომ მათ შორის არსებობს ურთერთცალსახა დამოკიდებულება, ანუ ეს სიმრავლეები ეკვივალენტური სიმრავლეები არიან. ე. ი. მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლე ეკვივალენტურია ამ რიცხვთა კვადრატების სიმრავლისა. ანალოგიურ დამოკიდებულებას აქვს ადგილი, თუ ავიღებთ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლეს: 1, 2, 3, 4,... n, …და ლუწ რიცხვთა სიმრავლეს: 2, 4, 6,... 2 n,... მათ შორისაც არსებობს ეკვივალენტური დამოკიდებულება. გალილეიმ პირველმა შენიშნა ეს ვითარება. მან უსასრულო სიმრავლის გარკვეულ ნაწილში გარდასახვის შესაძლებლობის ფაქტი პარადოქსული ვითარების გამოხატულებად მიიღო და აღნიშნა, რომ თუ მთელ დადებით რიცხვთა სიმრავლე ლუწ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია, მაშინ გამოდის უცნაური შედეგი, რომ მთელი უდრის თითქოს თავის ნაწილს. აღსანიშნავია, რომ უცნაურად ამ დროს მიჩნეულ იქნა სწორედ ის, რაც უსასრულო სიმრავლის ძირითადი ნიშანია და რაც განასხვავებს მას ძირითადად სასრულო სიმრავლეებისაგან.

უსასრულო სიმრავლის იმ თვისებას, რომ იგი შეიძლება ურთიერთცალსახად გადაისახოს მის საკუთრივ ნაწილში, განსაკუთრებით გაუსვა შემდგომ ხაზი ცნობილმა მათემატიკოსმა და ფილოსოფოსმა ბოლცანომ. მაგრამ ბოლცანოსათვის ეს ვითარება პარადოქსული ხასიათის მქონე ვითარებად არის შეფასებული და მხოლოდ მოგვიანებით, დედეკინდისა და კანტორის მიერ იქნა სწორად გააზრებული ამ ფაქტის ნამდვილი მნიშვნელობა. დედეკინდმა და კანტორმა სიმრავლის ის თვისება, რომ გარდაისახოს იგი თავისივე ნაწილში, გამოაცხადეს სიმრავლის უსასრულობის მაჩვენებელ ძირითად ნიშნად. დედეკინდი პირდაპირ ამბობს, რომ ს ი მ რ ა ვ ლ ე ი ქ ნ ე ბ ა უ ს ა ს რ უ ლ ო, თუ არსებობს ამ სიმრავლის ისეთი საკუთრივი ნაწილი, რომელიც მისი ეკვივალენტური იქნება. ანუ სიმრავლე უსასრულოა, თუ მისი ჭეშმარიტი ნაწილის სიმძლავრე ტოლია თვით სიმრავლის სიმძლავრისა; ე. ი. თუ სიმრავლე და მისი ჭეშმარიტი ნაწილი ტოლძალოვან სიმრავლეებს წარმოადგენენ.

ამრიგად, მივიღეთ უსასრულო სიმრავლის ახალი განმარტება, რომელიც, პირველისაგან განსხვავებით, გვეუბნება უკვე არა იმას, თუ როგორი არ არის უსასრულო სიმრავლე, არამედ იმას, თუ როგორია იგი; მაგრამ ამ შემთხვევაში სასრულო სიმრავლის ცნება მიიღება უკვე უარყოფის გზით. ე. ი. ახლა ვიტყვით, რომ სიმრავლე სასრულოა, თუ არ არსებობს იმისი ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც მთელი სიმრავლის ეკვივალენტური იქნება.

რ ი ც ხ ვ ი ს ც ნ ე ბ ი ს გ ა ნ ვ ი თ ა რ ე ბ ა. როგორც ვიცით მათემატიკის ერთ-ერთ ძირითად ცნებას ნ ა ტ უ რ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ც ნ ე ბ ა წარმოადგენს. იგი მჭიდროდ არის დაკავშირებული სიმრავლის ცნებასთან. ასე მაგალითად: ყოველ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული სასრულო სიმრავლე. თვით

ნატურალურ რიცხვთა მწკრივი კი უსასრულო სიმრავლეს წარმოადგენს: 1, 2, 3, 4,..., *n*,... ნატურალურ რიცხვებზე, ისევე როგორც სიმრავლეებზე, შეიძლება ჩატარდეს შეკრების, გამოკლების,, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ნებისმიერი შემთხვევისათვის ნატურალურ რიცხვებზე ეს მოქმედებანი არ განხორციელდება. ასე მაგალითად, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომელიც 5–თან ჯამში მოგვცემს 3–ს, ან რომელიც იქნება 4–ისა და 7–ის სხვაობა და სხვ. ეს ფაქტი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ნაკლზე მიუთითებს და ითხოვს რიცხვის ცნების გაფართოებას ისე, რომ შესაძლებელი გახდეს აღნიშნული ოპერაციების თავისუფალი წარმოება. ამის გამო შემოვიდა მ თ ე ლ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ც ნ ე ბ ა. მთელი რიცხვები წარმოგვიდგება ნატურალური რიცხვებისაგან შემდგარი წყვილთა სიმრავლის სახით. მაგალითად, მთელი რიცხვი 2 წარმოგვიდგება წყვილთა შემდეგი სიმრავლით: (4,2), (4,6), (7,5), (1,3)...

მთელი რიცხვების საშუალებით შესაძლებელია რაოდენობრივი ცვლილებების მიმართულების დახასიათება, ანუ შეიძლება რაოდენობრიობის დადებით და უარყოფით ხასიათზე ლაპარაკი. ისეთ წყვილთა სიმრავლე კი, რომლის კომპონენტებიც თანატოლია (1,), (2,), (3,)... გამოხატავს მთელ რიცხვს 0-ს, ე. ი. 0 ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ფაქტობრივად, არ შედის ისევე, როგორც არ შედის ამ სიმრავლეში დადებითი და უარყოფითი რიცხვები. დადებით და უარყოფით რიცხვებზე ლაპარაკი შეიძლება მხოლოდ ნატურალურ რიცხვთაგან შედგენილი წყვილების განხილვის შემდეგ. თავისთავად ნატურალური რიცხვები არც უარყოფითნი არიან და არც დადებითი. უარყოფითობისა და დადებითობის ცნებები თვით ნატურალურ რიცხვებს კი არ ახასიათებს, არამედ მათ შორის არ-სებული მიმართებების გამომხატველი ცნებებია. დადებითია ისეთი მთელი რიცხვი, რომელიც ნულზე მეტია და უარყოფითია ის, რომელიც ნაკლებია ნულზე.

ამრიგად, ნატურალურ რიცხვებზე გამოკლების ოპერაციის განხორციელების საკითხის კვლევამ წარმოშვა მთელი რიცხვის ცნება. რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოება მოხდა მთელ რიცხვებზე გაყოფის ოპერაციის განხორციელებადობის საკითხის შესწავლასთან დაკავშირებით. აშკარა გახდა, რომ გაყოფის ოპერაცია ვერ იქნება საყოველთაოდ განხორციელებული მთელი რიცხვების შემთხვევაში. ასე მაგალითად: 4 გაიყოფა 2–ზე, 6 გაიყოფა 3–ზე, მაგრამ 7 არ გაიყოფა 2–ზე: ასევე, არ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი, რომელიც მიიღება 13–ის 3–ზე გაყოფის შედეგად და სხვ. ე. ი. საჭიროა რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოება, რათა გაყოფის ოპერაციას მიეცეს საყოველთაო ხასიათი. ასე შემოვიდა რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი რ ი ც ხ ვ ი ს ც ნ ე ბ ა (მართალია, ისტორიულად, ჯერ შემოღებული იყო რაციონალური რიცხვები და შემდეგ კი მთელი რიცხვები, მაგრამ ლოგიკური დალაგების თვალსაზრისით უფრო მოხერხებულია ამ გზით რაციონალური რიცხვის ცნების შემოღება).

რაციონალური რიცხვი შეიძლება განისაზღვროს სიმრავლის ცნების დახმარებით, ანალოგიურად იმისა, როგორც გაკეთდა ეს მთელი რიცხვისა და ნატურალური რიცხვის შემთხვევაში. ასე მაგალითად, ამბობენ, რომ ყოველ რაციონალურ რიცხვს შეესაბამება მთელი რიცხვისგან შედგენილი წყვილები. ვთქვათ, გვაქვს რაციონალური რიცხვი 1/5, მას შეესაბამება მთელი რიცხვებისაგან შემდგარ წყვილთა ასეთი სიმრავლე: (1,5), (2,10), (5,25)... იმ შემთხვევაში, როცა რაციონალური რიცხვები შეიძლება დაყვანილ იქნან მთელ რიცხვებზე, საქმე გვექნება მთელ რაციონალურ რიცხვებთან, ხოლო რაციონალურ რიცხვებს, რომლებიც მთელ რიცხვებზე არ დაიყვანება, წილადები ეწოდებათ.

ამრიგად, რაციონალური რიცხვის ცნების შემოტანით უზრუნველყოფილი გახდა გაყოფის ოპერაციის საყოველთაო ხასიათი, რადგანაც ერთი რაციონალური რიცხვი ყოველთვის გაიყოფა მეორეზე (გარდა იმ შემთხვევისა, როდესაც ეს მეორე რიცხვი იქნება 0).

მთელი რიცხვების შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ ნებისმიერ მთელ დადებით რიცხვს, დავინახავთ, რომ მას ყოველთვის ექნება სრულიად გარკვეული მეზობელი რიცხვები: $n+1$ და $n-1$, ასე, რომ რაიმე ორ მთელ რიცხვს შორის ახალი მთელი რიცხვის ჩასმა შეუძლებელი იქნება. რაციონალური რიცხვების შემთხვევაში კი ნებისმიერ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის ყოველთვის შეიძლება ჩაისვას ახალი რაციონალური რიცხვი ისე, რომ ამ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეს შექმნის. დაისვა საკითხი ამ სიმრავლის ბუნების გარკვევის შესახებ.

ამრიგად, მთელი რიცხვებისაგან განსხვავებით, ყოველ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის შეიძლება მოთავსდეს რაციონალურ რიცხვთა უსასრულო სიმრავლე, ე. .ი. რაციონალური რიცხვები უფრო მჭიდროდ არიან განლაგებული ერთმანეთთან, ვიდრე მთელი რიცხვები. ისმება კითხვა: როგორი ხასიათისაა ეს სიმჭიდროვე, ანუ როგორია რაციონალურ რიცხვთა განლაგება? წყვეტილია თუ უწყვეტი? საკითხის ასე დაყენებამ მოითხოვა სიმრავლის უწყვეტობის ცნების განსაზღვრა. უწყვეტ სიმრავლედ ითვლება, მაგალითად, ღერძზე მდებარე ყველა წერტილის სიმრავლე. იმისათვის კი, რომ დავამტკიცოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობა, საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ ღერძზე მდებარე ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული რაციონალური რიცხვი. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ყოველ რაციონალურ რიცხვს ღერძზე შეესაბამება გარკვეული წერტილი, მაგრამ აღმოჩნდა, რომ ყოველ წერტილს ღერძზე არ შეესაბამება რაციონალური რიცხვი (უთანაზომო მონაკვეთების შემთხვევა). იმისათვის, რათა განხორციელებულიყო უწყვეტობის არითმეტიკული გამოხატულება და მიღებული ყოფილიყო რიცხვთაგან შემდგარი უწყვეტი სიმრავლე, დაისვა საკითხი რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოებისა. ასე შემოვიდა ნამდვილი რიცხვის ცნება.

ნამდვილი რიცხვის ცნების ზუსტი განსაზღვრება მოხერხდა მხოლოდ სიმრავლეთა თეორიის ჩამოყალიბების შემდეგ. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნამდვილი რიცხვის ცნების შემოტანის საჭიროება გაჩნდა უთანაზომო მონაკვეთებთან დაკავშირებით; გამოირკვა, რომ არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც შეესაბამება ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოთენუზისა და კათეტის შეფარდებას, ან ისეთი, რომელიც გამოხატავს კვადრატის დიაგონალის შეფარდებას კვადრატის გვერდთან და სხვ. მაგალითად, რომ არსებულიყო ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც გამოხატავდა კვადრატის დიაგონალის შეფარდებას კვადრატის გვერდთან, მაშინ ამ რიცხვის კვადრატი ორის ტოლი უნდა ყოფილიყო. მაგრამ რაციონალურ რიცხვთა შორის ასეთი თვისების მქონე რიცხვი არ არსებობს. ე. ი. არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც ტოლი იქნება $\sqrt{2}$. ამავე დროს, არსებობს უსასრულო რაოდენობა რაციონალური რიცხვებისა, რომელთა კვადრატები ნაკლები იქნება 2–ზე (1; 1,4; 1,41;...) და ასევე, უსასრულო რაოდენობა რაციონალური რიცხვებისა, რომელთა კვადრატები მეტი იქნება 2–ზე (1,5; 1,52; 1,53;...); ანუ ღერძზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან, ნაკლებობით ან მეტობით წერტილს, რომელიც შეესაბამება რიცხვს $\sqrt{2}$, უახლოვდება უსასრულო რაოდენობა რაციონალური რიცხვებისა, ე. ი. საჭიროა თვისებრივად ახალი რიცხვის ცნების შემოტანა.

სიმრავლეთა თეორიის ჩამოყალიბების შემდეგ შეიქმნა ირაციონალური რიცხვის სხვადასხვა თეორია; მათგან ყველაზე ცნობილია გერმანელი მათემატიკოსის დედეკინდის თეორია, რომელიც განკვეთის თეორიის სახელითაა ცნობილი. ამ თეორიის საფუძველზე შემოვიდა ნამდვილი რიცხვის ცნება. განვიხილოთ, თუ როგორ ხდება ეს. ამისათვის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე გავყოთ ორ, A და B კლასად ისე, რომ დაცული იყოს შემდეგი სამი პირობა:

1. არც A და არც B კლასი არ არის ცარიელი. ე. ი. არსებობს ერთი რიცხვი მაინც, რომელიც ეკუთვნის A კლასს და ასევე, არსებობს ერთი რიცხვი მაინც, რომელიც B კლასს ეკუთვნის;
2. თუ რომელიმე რიცხვი A კლასს ეკუთვნის, მაშინ ამ რიცხვზე მცირე ყველა რიცხვი ეკუთვნის იმავე კლასს, არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც ერთდროულად ორივე კლასს ეკუთვნოდეს;
3. A კლასს არ გააჩნია უდიდესი რიცხვი. ე. ი. თუ რომელიმე რიცხვი ეკუთვნის A კლასს, მაშინ არსებობს ამ რიცხვზე მეტი ისეთი რიცხვი, რომელიც იმავე კლასს ეკუთვნის.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაყოფას ისეთ ორ კლასად, რომელიც ზემო სამ პირობას აკმაყოფილებს, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის განკვეთა ეწოდება და აღინიშნება ასე: A/B. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ზემოთ ჩამოთვლილი

თვისებები ამ ორი კლასიდან ექნება მხოლოდ ერთ კლასს. იმ კლასს, რომელსაც ეს თვისებები ექნება, უწოდებენ განკვეთის ქვედა კლასს (*A*), მეორეს კი – ზედა კლასს (*B*).

ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის განკვეთასთანაა დაკავშირებული. იგი განისაზღვრება განკვეთის ან ქვედა, *A* კლასის ან ზედა, *B* კლასის საშუალებით, ან როგორც *A* და *B* კლასის ერთობლიობა. მაგარამ ნამდვილი რიცხვის განმარტებისათვის საკმარისია რომელიმე ერთ-ერთი კლასი (ან*A* ან *B*), რადგან თუ მოცემულია ერთი კლასი, აქედან გამომდინარეობს, რომ მეორე კლასიც ვიცით. მართლაც, *B* კლასს ეკუთვნის ის რიცხვები, რომლებიც *A* კლასში არ შედის. შევთანხმდეთ და ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრისათვის ავირჩიოთ განკვეთის ქვედა, *A* კლასი. მაშინ შეიძლება ვთქვათ, რომ ნამდვილი რიცხვი არის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის განკვეთის ქვედა კლასი. „ნამდვილი რიცხვი, ამგვარად, განსაზღვრულია როგორც რაციონალურ რიცხვთაგან შედგენილი გარკვეული სახის სიმრავლე. ნამდვილი რიცხვი ის კი არ არის, რასაც ამ უსასრულო სიმრავლის გავლის „შემდეგ" მივიღებთ, არამედ თვით ეს სიმრავლეა, რომელსაც კი არ ვუახლოვდებით, არამედ რომელიც გვაქვს. მართალია, მისი განსაზღვრება ყველა მისი ელემენტის ჩამოთვლით არ მოხდება, მაგრამ ეს მის მოცემულობის ფაქტს კი არ ასუსტებს, არამედ თვით უსასრულო სიმრავლის ხასიათთან არის დაკავშირებული" (12, 126–127). აშკარაა, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის ნამდვილ რიცხვთა ქვესიმრავლე. რაციონალური რიცხვი, როგორც ნამდვილი რიცხვი, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ რაციონალურ რიცხვთა ისეთი განკვეთით, როდესაც განკვეთის ზედა კლასში არსებობს უმცირესი რიცხვი და სწორედ ეს უმცირესი რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია მივიჩნიოთ ნამდვილ რიცხვად. ასე მაგალითად, ავიღოთ რიცხვი „5". თუ რიცხვ „5"-ს განვიხილავთ როგორც ნამდვილ რიცხვს, მას მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ორ კლასად გაყოფით. ქვედა კლასში მოვათავსებთ ყველა იმ რაციონალურ რიცხვს, რომელიც ნაკლებია 5-ზე, ხოლო ზედა კლასში მოვათავსებთ იმ რაციონალურ რიცხვებს, რომლებიც მეტია 5-ზე და თვით 5-საც. შეგვიძლია ნამდვილი რიცხვი 5 ვუწოდოთ ზედა კლასის უმცირეს რაციონალურ რიცხვს – 5-ს. ასეთივე გზით ხდება ყოველი რაციონალური ნამდვილი რიცხვის განსაზღვრა. იგი არის რაციონალურ რიცხვთა განკვეთის ზედა კლასის უმცირესი რაციონალური რიცხვი. ამავე დროს, ქვედა კლასში მოთავსებულია ამ რიცხვზე მცირე რიცხვები, ხოლო ზედა კლასში ეს რიცხვი და მასზე მეტი რაციონალური რიცხვები.

ახლა ავიღოთ ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომელიც რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება: მაგალითად, 2. როგორც ვნახეთ, რაციონალურ რიცხვთა შორის არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი ტოლი იქნება 2-ისა. ამიტომ საჭიროა რიცხვის ცნების გაფართოება. მოვახდინოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაყოფა ორ ისეთ კლასად, რომ ქვედა, *A* კლასში მოვათავსოთ უარყოფითი რაციონალური

რიცხვები, ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატი ნაკლებია 2-ზე, ხოლო ზედა, B კლასში მოვათავსოთ ყველა რაციონალური რიცხვი, ე. ი. ისეთი დადებითი რიცხვები, რომელთა კვადრატი მეტია 2-ზე. მტკიცდება, რომ რიცხვთა ასეთი გაყოფა ქმნის განკვეთას, რომლის არც ქვედა კლასს აქვს უდიდესი რიცხვი და არც ზედა კლასს – უმცირესი რიცხვი, რადგან ორივე კლასი შედგება რაციონალური რიცხვებისაგან და $\sqrt{2}$ კი არც ერთი რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება. რაციონალურ რიცხვთა განკვეთის ქვედა კლასს, როდესაც ზედა კლასში უმცირესი რიცხვი არ გაგვაჩნია, ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.

აღსანიშნავია, რომ რაციონალური რიცხვის განზოგადებას წარმოადგენს არა ირაციონალური რიცხვი, არამედ ნამდვილი რიცხვი; ეს უკანასკნელი მოიცავს როგორც რაციონალურ, ისე ირაციონალურ რიცხვებს.

ნამდვილი რიცხვის ცნების შემოტანის შემდეგ მიღებულ იქნა რიცხვთაგან შემდგარი უწყვეტი სიმრავლე, ანუ მიღწეულ იქნა უწყვეტობის არითმეტიკული გამოხატულება. თუ ავიღებთ ახლა ღერძზე ყველა წერტილის სიმრავლეს, შეგვეძლება არა მხოლოდ ის, რომ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვისათვის ვიპოვოთ ღერძზე შესაბამისი წერტილი, არამედ ისიც, რომ ღერძზე ნებისმიერი წერტილისათვის ვიპოვოთ შესაბამისი ნამდვილი რიცხვი. „მსგავსება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და ღერძის ყველა წერტილის სიმრავლეთა შორის გამომხატველია განუყრელი და საფუძველშივე დადგენილი კავშირისა არითმეტიკასა და გეომეტრიას შორის“ (12, 137). ამის საფუძველზე აღდგა მთლიანობა მათემატიკის საგანშიც და მეთოდშიც.

რიცხვის ცნების განვითარების ისტორია აშკარა მაჩვენებელია იმისა, რომ რიცხვის ცნება მხოლოდ რაოდენობრიობის გამომხატველი ცნება არ არის. ანუ, როგორც ფ. ენგელსი ამბობდა, მართალია, „რიცხვი არის წმინდა რაოდენობრივი განსაზღვრა, რომელიც ჩვენ ვიცით, მაგრამ იგი სავსებით შეიცავს თვისებრივ განსხვავებებს“ (1,271). „ცალკეული რიცხვი ერთგვარ თვისობრიობას იძენს უკვე რიცხვთა სისტემაში და იმის მიხედვით, თუ როგორია ეს სისტემა“ (1,272). ეს ფაქტი შესანიშნავი დადასტურებაა იმ დიალექტიკური ერთიანობისა, რომელიც რაოდენობრიობასა და თვისებრიობას შორის არსებობს და რომელიც ობიექტურ სინამდვილეში არსებულ კანონთა ერთ-ერთ ძირითად სახეს წარმოადგენს.

ერთმანეთისაგან ანსხვავებდნენ თვლად და არათვლად სიმრავლეებს. თვლადი ეწოდება ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურ ყველა სიმრავლეს. რადგან ეკვივალენტურობის დამოკიდებულება რეფლექსურია, ამიტომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ეკვივალენტურია თავისი თავისა და ე. ი. იგი თვლადი სიმრავლეა. თვლადია, მაგალითად, ლუწ რიცხვთა სიმრავლე: 2, 4, 6,..., $2n$, ...,

კენტ რიცხვთა სიმრავლე: 1, 3, 5, ..., $2n$ +1..., ნატურალურ რიცხვთა კვადრატების სიმრავლე: 1, 4, 9, ..., n^2..., და სხვ.

თვლადი სიმრავლეები გარკვეული თვისებებით ხასიათდებიან. კერძოდ: 1. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ნაწილი აგრეთვე თვლადია; 2. სასრულოსა და თვლადი სიმრავლეების ჯამი თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს; 3. თვლადი სიმრავლის სასრულო რაოდენობის ჯამი აგრეთვე თვლადი სიმრავლეა; 4. თვლად სიმრავლეთა თვლადი სისტემის ჯამი აგრეთვე თვლად სიმრავლეს წარმოადგენს და სხვ. თვლადი სიმრავლეების გარდა, არსებობს, აგრეთვე, არათვლადი სიმრავლეებიც, ე. ი. სიმრავლეები, რომელნიც არ არიან ეკვივალენტური ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლისა. არათვლადია, მაგალითად, 0-სა და 1-ს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, იმ შემთხვევაში, როდესაც სიმრავლეები ეკვივალენტურია, ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს ერთნაირი სიძლიერე აქვთ. სიმ-რავლეებს, რომელნიც 0-სა და 1-ს შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურია, კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები ეწოდებათ. კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეები განსხვავდებიან თვლადი სიმრავლეებისაგან. თუ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლეს თვლად ნაწილს გამოვაკლებთ, ისევ კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლე დაგვრჩება.

ნამდვილი რიცხვის ცნება შეიძლება განისაზღვროს როგორც ნატურალური, ისე მთელი ან რაციონალური რიცხვების საშუალებით. მაგრამ ამ ცნების განსაზღვრის ყველა გზა მიგვიყვანს კონტინუუმის სიმძლავრის სიმრავლემდე და ნამდვილი რიცხვი, პირდაპირი თუ არაპირდაპირი გზით, ყოველთვის წარმოგვიდ-გება, როგორც ნატურალური რიცხვებისაგან აგებული ობიექტი.

კრონეკერი წერდა, რომ „ღმერთმა შექმნა მთელი რიცხვები, ყოველივე სხვა კი ადამიანის შემოქმედებაა“ (13,25). ამით მას სურდა, ხაზი გაესვა მთელი რიცხვების ფუნდამენტალური მნიშვნელობისათვის. შეიძლება ითქვას, რომ ნატურალური რიცხვები წარმოადგენს ყველაზე მარტივ ობიექტებს, რომლებთანაც კი საქმე აქვს მათემატიკას. ამიტომ გასაგებია, რომ ნატურალურ რიცხვთა შესწავლას სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა ენიჭება. თუ დავუშვებთ, რომ ნატურალურ რიცხვთა მწკრივის პირველი, საწყისი ობიექტი არის 0, რომლისაგანაც მიიღება შემდგომ ყველა დანარჩენი ობიექტი, მაშინ ეს მწკრივი შეიძლება დავახასიათოთ შემდეგი აქსიომებით:

1. 0 არის ნატურალური რიცხვი;
2. თუ A ნატურალური რიცხვია, მაშინ A+1-იც იქნება ნატურალური რიცხვი;
3. ნებისმიერი ორი A და B ნატურალური რიცხვისათვის, თუ $A+1=B+1$, მაშინ $A=B$;
4. ნებისმიერი A ნატურალური რიცხვისათვის $A+1\neq 0$.

ამ შემთხვევაში არ ექცევა ყურადღება იმას, თუ როგორია თვით ნატურალურ რიცხვთა ბუნება, არამედ ლაპარაკია მხოლოდ იმაზე, თუ როგორ ლაგდებიან ისინი მწკრივის სახით. ცალკეულ ნატურალურ რიცხვს შეესაბამება ნატურალურ რიცხვთა მწკრივში გარკვეული კონკრეტული ადგილი; ანუ შეიძლება ითქვას, რომ რაიმე ნატურალური რიცხვი მოცემულია, თუ მოცემულია ინდუქციური განსაზღვრების საშუალებით მისი მიღების გზა.

ინდუქციური განსაზღვრების თანახმად, ნატურალური რიცხვები მიიღება გარკვეული რიგით ისე, რომ თუ A-დან მიიღება B, მაშინ $A>B$. აქედან მიიღება $A<B$ მიმართების ინდუქციური განსაზღვრება, სადაც A და B გაივლიან ნატურალურ რიცხვთა მთელ რიგს. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი გულისხმობს, რომ

1. $A<A+1$;
2. თუ $A<B$, მაშინ $A<B+1$;
3. $A<B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის გამომდინარეობს 1 და 2-დან.

ვთქვათ, N არის ნატურალურ რიცხვთა რაღაც თვისება, მაშინ შეგვიძლია, რომ ზემოთ თქმულის საფუძველზე ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ძირითადი დებულებები:

1. 0-ს აქვს თვისება N;
2. თუ რაიმე A ნატურალურ რიცხვს ექნება თვისება N, მაშინ მომდევნო $A+1$ რიცხვსაც ექნება იგივე თვისება;

ე . ი. N თვისება ექნება ყველა ნატურალურ რიცხვს.

ეს არის მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი. თუ A-ს განვიხილავთ როგორც ნატურალური რიცხვის ცვლადს, ხოლო $N(A)$-ს წინადადებად, რომ A-ს აქვს თვისება N, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი ასე შეიძლება გამოითქვას: თუ $N(O)$ და ნებისმიერი A-სთვის $N(A)$-დან გამომდინარეობს $N(A+1)$, მაშინ $N(A)$ ყველა A-სთვის. $N(A)$ წინადადებას, რომელიც დამოკიდებულია A ცვლადზე, უწოდებენ ინდუქციის წინადადებას, ხოლო თვით A ცვლადს კი ინდუქციის ცვლადს. მტკიცებათა ერთ (1) ნაწილს, $N(O)$ უწოდებენ ინდუქციის ბაზისს, ხოლო მეორე (2) ნაწილს, რომელიც გვეუბნება, რომ თუ $N(A)$, მაშინ $N(A+1)$, ინდუქციის ნაბიჯს. ინდუქციის ნაბიჯის შიგნით გაკეთებულ $N(A)$ დაშვებას, საიდანაც გამოგვყავს $N(A+1)$, ინდუქციის დაშვებას უწოდებენ. ზოგჯერ ინდუქციის ნაბიჯის ჩასატარებლად საჭიროა არა უბრალოდ $N(A)$ დაშვება, არამედ დაშვება, რომ $N(B)$ ყველა $B \leq A$. ინდუქციის პრინციპი შესაძლოა გამოყენებულ იქნეს არა მხოლოდ ნატურალურ რიცხვებზე წარმოებულ მსჯელობაში, არამედ მთელი დადებითი რიცხვების დროსაც.

ა ლ ბ ა თ ო ბ ა თ ა თ ე ო რ ი ა და მ ი ს ი ფ ი ლ ო ს ო ფ ი უ რ ი ა ს პ ე ქ ტ ი. სიმრავლეთა თეორიასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული მათემატიკის ისეთი დარგი, როგორიცაა ალბათობის აღრიცხვა. ა ლ ბ ა თ ო ბ ი ს ც ნ ე ბ ა ძირითადი ცნებაა, რომელიც საჭიროა ბუნების მთელი რიგი მოვლენების

დახასიათებისათვის და რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული შემთხვევითობის ცნებასთან. შემთხვევითობა და აუცილებლობა დიალექტიკის კატეგორიებია და ისინი ობიექტური სინამდვილის სხვადასხვა მხარეს ასახავენ. მათი გაიგივება და ერთმანეთზე დაყვანა შეცდომაა და მეტაფიზიკური თვალსაზრისის საფუძველი ხდება. ჩვენ შემდეგ ვისაუბრებთ შემთხვევითობის, აუცილებლობისა და მიზეზობრივი კავშირის შესახებ ფიზიკური პროცესების განხილვასთან დაკავშირებით და გავარკვევთ ამის ფონზე ალბათობის ცნების შინაარსს, ახლა კი განვიხილოთ, თუ როგორ წარმოიდგინება შემთხვევითობა და ალბათობა მათემატიკაში.

საკითხი ეხება შემთხვევითი ხასიათის ხდომილებებს. შემთხვევითი ხასიათის ხდომილებები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან იმით, რომ გაჩენის სხვადასხვა შანსი აქვთ; ანუ მოლოდინი იმისა, რომ მოხდება ერთი გარკვეული სახის ხდომილება, უფრო მეტია, ვიდრე მოლოდინი იმისა, რომ მოხდება რომელიმე სხვა. მაგალითად, ავიღოთ და რაიმე ყუთში ჩავყაროთ შავი და თეთრი ბურთულების ერთნაირი რაოდენობა და დავიწყოთ შემდეგ იქიდან სათითაოდ მათი ამოღება. ის, რომ ყუთიდან ამოღებული იქნება თეთრი (ან შავი) ბურთულა, არის შემთხვევითი ხდომილება. ყუთში შავი და თეთრი ბურთულების ერთნაირი რაოდენობის შემთხვევაში შანსი იმისა, რომ ყუთიდან ამოღებული ბურთულა თეთრია, იქნება იგივე, რაც შანსი იმისა, რომ ამოღებულ ბურთულას ექნება შავი ფერი. ახლა ყუთში შავი ბურთულების რაოდენობა ძალიან შევამციროთ, ხოლო თეთრისა კი უცვლელი დავტოვოთ. მაშინ გაიზრდება ყუთიდან თეთრი ბურთულების ამოღების შანსი, შავისა კი შემცირდება. მაგრამ შანსის ასეთი ცვლილების შემდეგაც როგორც შავი, ასევე თეთრი ბურთულის ამოღება შემთხვევით ხდომილებად დარჩება. ე. ი. შანსის გაზრდით ხდომილების შემთხვევითი ხასიათი არ იცვლება. შესაძლოა, რომ თეთრი ბურთულის ამოღების შანსი ბევრად მეტი გახდეს, ვიდრე შავი ბურთულისა, მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ პირველსავე ცდიდან ყუთიდან აუცილებლად თეთრი ბურთულა უნდა იყოს ამოღებული. რაგინდ მცირეც უნდა იყოს შავი ბურთულის ამოღების შანსი, მაინც შესაძლოა, რომ ჩვენ სწორედ შავი ბურთულა ამოვიღეთ ყუთიდან. ამაში მდგომარეობს ხდომილების შემთხვევითი ხასიათი.

შემთხვევითი ხდომილების დასახასიათებლად შემოაქვთ ალბათობის ცნება. იგი გამოხატავს შემთხვევითი ხდომილების მოხდენის შანსს და ამით იძლევა მისი განხორციელების შესაძლებლობის რაოდენობით დახასიათებას. მათემატიკის ის დარგი, რომელსაც ალბათობათა აღწერა ეწოდება, სწავლობს შემთხვევით ხდომილებათა სწორედ იმ ასპექტს, რომელიც ალბათობის ცნებაში გამოიხატება. ასე რომ, ალბათობის ცნება შემთხვევით პროცესთა დამახასიათებელი ძირითადი ცნებაა.

ალბათობის თეორიისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მასიური სახით აღებული შემთხვევითი ხდომილებების განხილვას. ალბათობის ცნებაში

ლაპარაკია ყველა შესაძლო შემთხვევათა რაოდენობაზე და იმ შემთხვევათა რაოდენობაზე, რომელნიც აღებულ ხდომილებას ხელს უწყობს. მაგალითად, თუ ყუთში A შავი ბურთია და B თეთრი, სულ ადგილი ექნება $A+B$ შესაძლებლობას. ამ დროს ამბობენ, რომ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება შავი ფერის, არის: $\frac{A}{A+B}$, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრი იქნება, არის“ $\frac{B}{A+B}$. ზოგადად კი, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ რაიმე ხდომილების მოხდენის ალბათობა W უდრის ამ ხდომილების გაჩენის ხელშემწყობ შემთხვევათა რიცხვის (S) შეფარდებას ყველა შემთხვევათა რიცხვთან (N):

$$W = \frac{S}{N} \tag{1}$$

თუ N-ს წარმოვიდგენთ, როგორც ყველა შესაძლო შემთხვევათა სიმრავლეს, მაშინ S იქნება ამ სიმრავლის ქვესიმრავლე და (1) იქნება ალბათობა იმისა, რომ ცდის შედეგი იქნება S სიმრავლის ელემენტი. ალბათობის ასეთ განსაზღვრას თავისებური სიძნელეები ახლავს თან. მაგალითად, ამ დროს ნაგულისხმებია ის, რომ ყველა შესაძლო შემთხვევას ერთნაირი შანსი აქვს, რომ ყველა შემთხვევა ერთნაირი ძალით არის შესაძლებელი, ანუ მათ ტოლშესაძლებლობა ახასიათებთ. ე.ი. გამოდის, რომ ალბათობის ცნების განსაზღვრას წინ უსწრებს ამ ცნების გამოყენება. ამასთან დაკავშირებით, თუ დავუკვირდებით, დავინახავთ, რომ ალბათობის (1) განსაზღვრა არის რომელიმე ხდომილების მოხდენის ალბათობის რიცხვის გამოხატულება, რომელიც იძლევა ერთი ალბათობიდან მეორეზე გადასვლის საშუალებას; იგი არ წარმოადგენს, ზოგადად, ალბათობის ცნების განსაზღვრას. გარდა ამისა, იმ დროს, როდესაც საჭირო იქნება ისეთ ხდომილებათა განხილვა, რომელთათვისაც ყველა შესაძლო შემთხვევათა სიმრავლე იქნება უსასრულო სიმრავლე, ანდა ისეთი ხდომილებებისა, რომელთათვისაც ვერ გამოვყოფთ ზუსტად ყველა შესაძლო შემთხვევათა და ხელშემწყობ შემთხვევათა სიმრავლეებს, მაშინ კიდევ ერთხელ აშკარა გახდება ალბათობის (1) განსაზღვრების მოუხერხებლობა.

ალბათობათა თეორიის დაფუძნებისათვის საჭირო შეიქნა მისი სხვაგვარი გზით აგება. დაისვა საკითხი ალბათობათა თეორიის აქსიომატური გზით აგების შესახებ. საბჭოთა მეცნიერებს: ბერნშტეინს, კოლმოგოროვს, ჩებიშევს ეკუთვნით პირველი ცდები ამ მიმართულებით. შედეგებში, რომელნიც მათ მიერ იქნა მიღებული, გარკვეულად მოიხსნა აღნიშნული სიძნელეები.

ალბათობის იმ განსაზღვრებიდან, რომ $W = \frac{S}{N}$, გამომდინარეობს, რომ ალბათობის რიცხვითი მნიშვნელობა, იმისდა მიუხედავად, თუ როგორი იქნება S და N, მოთავსებული იქნება 0-სა და 1-ს შორის. მაგალითად, თუ ყუთში სულ არის 10 ბურთი და ათივე ბურთი შავი ფერისაა, მაშინ ხდომილებისათვის: ყუთიდან შავი ბურთის ამოღება S=N და W=1, რაც ნიშნავს იმას, რომ ხდომილება აუცილებლად მოხდება (ყუთიდან აუცილებლად იქნება მოღებული შავი ბურთი). მაგრამ იმავე შემთხვევაში, ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი =0, ანუ ასეთი ხდომილება შეუძლებელია. როგორც ვხედავთ, ალბათობა ვერ იქნება 0-ზე ნაკლები და 1-ზე მეტი.

ალბათობათა თეორიაში დიდი მნიშვნელობა აქვს ე. წ. ფარდობითი სიხშირის ცნებას. განვიხილოთ, თუ რას წარმოადგენს იგი. დავუშვათ, ვახდენთ დაკვირვებას და აღმოჩნდა, რომ n ცდის წარმოებისას A ხდომილება გაჩნდა m-ჯერ. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ A ხდომილების გაჩენის ფარდობითი სიხშირე არის $\frac{m}{n}$. ფარდობითი სიხშირის ცნება განსხვავებულია ალბათობის ცნებისაგან და ისინი არ უნდა გავაიგივოთ ერთმანეთთან. მაგალითად, თუ გვაქვს ყუთი, სადაც ჩაყრილია შავი და თეთრი ბურთები, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება შავი ($W_შ$) განისაზღვრება შავი ბურთების რაოდენობის ($M_შ$) შეფარდებით ბურთების საერთო რაოდენობასთან N. ასევე, ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული იქნება თეთრი ბურთი ($W_თ$), არის $\mathrm{Wa} = \frac{Ma}{N}$. ხდომილების ალბათობის განსასაზღვრავად არ არის საჭირო ცდების ჩატარება, ალბათობა გამოითვლება ცდაზე დაკვირვების გარეშე. მაგრამ თუ გვსურს განვსაზღვროთ იმავე ხდომილების სიხშირე, მაშინ საჭირო იქნება ჩავატაროთ ცდები და ვაწარმოოთ ცდების შედეგთა აღრიცხვა. ამ შემთხვევაში არ არის საჭირო ვიცოდეთ, რამდენი თეთრი და რამდენი შავი ბურთია ყუთში. ცდები გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ ამოვიდა ყუთიდან თეთრი ბურთი და რამდენჯერ – შავი ისე, რომ ყუთის შემადგენლობის ცოდნა არ იქნება საჭირო. რა თქმა უნდა, ეს არ უნდა გავიგოთ ისე, თითქოს სიხშირე ობიექტურ ვითარებას ასახავს და ალბათობა კი – არა. როგორც ერთი, ისე მეორე ხდომილებათა მიმდინარეობის ობიექტური ვითარების გამომხატველი ცნებაა, მაგრამ სხვადასხვა გზით გამოითვლება: ერთი – თეორიულად, მეორე კი – ცდის შედეგთა აღრიცხვით. გარდა ამისა, ალბათობის გამოთვლა ზოგჯერ გარკვეულ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული, რაც ტოლშესაძლო შემთხვევათა სიმრავლის ხელშემწყობ შემთხვევათა სიმრავლესთან კავშირის გამომჟღავნებაში გამოიხატება. განსაკუთრებით ძნელია ალბათობის გამოთვლა

რთული ხასიათის ხდომილებების დროს, მაშინ, როდესაც სიხშირეთა პოვნა ასეთ შემთხვევაში (ცდის შედეგთა აღრიცხვის საფუძველზე) არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. ამასთან დაკავშირებით დაისვა საკითხი სიხშირისა და ალბათობის ცნებათა ურთიერთმიმართების ხასიათის გარკვევის შესახებ. იმ შემთხვევაში, თუ მათ შორის კავშირი აღმოჩნდებოდა, შეგვეძლებოდა შემთხვევით ხდომილებათა ახალი გზით დახასიათება, რაც გაადვილებდა მათი შესწავლის საქმეს ალბათობათა გამოთვლების დროს წამოჭრილი სიძნელეების შემთხვევაში.

კანონი, რომელიც გამოხატავს კავშირს ხდომილების ალბათობასა და სიხშირეს შორის, პირველად მიღებული იყო მათემატიკოს იაკობ ბერნულის მიერ და მას დ ი დ რ ი ც ხ ვ თ ა კ ა ნ ო ნ ი ეწოდება. ეს კანონი გვეუბნება, რომ სიხშირე ძალიან ახლოს არის ალბათობასთან, თუ საკმაოდ დიდია ცდათა რიცხვი. შემდგომ ამ კანონს უფრო ფართო და განზოგადებული სახე მისცა რუსმა მათემატიკოსმა ჩებიშევმა. ამრიგად, ვამბობთ, რომ თუ A ხდომილების ალბათობა სხვადასხვა ცდისთვის ერთი და იგივეა, მაშინ ყოველი დადებითი ε და η რიცხვებისათვის ცდათა ისეთი დიდი n რიცხვი შეგვიძლია ავიღოთ, რომ A ხდომილების გაჩენის ალბათობა W და ფარდობითი სიხშირე $\frac{m}{n}$ ერთმანეთისგან ε-ზე ნაკლები სიდიდით გადაიხრებიან.

$$\text{ე. ი.} \qquad \left|\frac{m}{n} - W\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

და (2) უტოლობის ალბათობა მეტი იქნება უცილობელი ალბათობის, ე. ი . 1-სა და η რიცხვის სხვაობაზე – $(1-\eta)$-ზე. თუ ε და η ძალიან მცირე რიცხვებია, ეს ნიშნავს, რომ (2) უტოლობის ალბათობა ახლოს იქნება 1-თან, ე. ი. ცდათა დიდი რიცხვისათვის ძალიან მცირე იქნება განსხვავება ალბათობასა და სიხშირეს შორის (12, 189).

ამრიგად, დიდ რიცხვთა კანონი გვეუბნება, რომ ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში სიხშირე და ალბათობა რიცხობრივად ძალიან ახლოს არიან ერთმანეთთან. ე. ი. სიხშირე ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში აღარ რჩება ისეთ სიდიდედ, რომელსაც შეიძლება სრულიად მოულოდნელი მნიშვნელობა ჰქონდეს, არამედ გვევლინება როგორც შემთხვევით ხდომილებათა კანონზომიერების გამომხატველი რიცხვი. ე,ი. შემთხვევით ხდომილებათა ის ობიექტური ვითარება, რომელსაც ასახავს ალბათობის ცნება (ხდომილების გაჩენის შანსი), ცდათა დიდი რიცხვის დროს გამოხატულებას პოულობს სიხშირეში. ეს ფაქტი, რომელსაც გამოხატავს დიდ რიცხვთა კანონი, შემთხვევით ხდომილებათა დამახასიათებელ ძალზედ მნიშვნელოვან და არსებით მომენტს წარმოადგენს; იგი მიუთითებს იმ

დიალექტიკურ ერთიანობაზე, რომელიც შემთხვევითობასა და აუცილებლობას შორის არსებობს.

იმ ფაქტზე, თუ სტატისტიკა როგორ უწყობს ხელს შინაგანი კანონზომიერების გამომჟღავნებას, მიუთითებდა კ. მარქსი „კაპიტალში“, სადაც იგი (კაპიტალისტურ კონკურენციასთან დაკავშირებით) ხაზგასმით აღნიშნავდა, რომ, მართალია, ცალკეული შემთხვევების დროს ბატონობს შემთხვევითობა, მაგრამ, თუ შემთხვევათა დიდ რიცხვს განვიხილავთ, მაშინ დავინახავთ, რომ არსებობს ამ შემთხვევითობათა მარეგულირებელი შინაგანი კანონი, რომელიც მხოლოდ მსხვილ მასებში იწყებს გამოვლენას (1, ტ. 25, 176). ასევე, ფ. ენგელსი წერდა, რომ იქ, სადაც ზედაპირზე შემთხვევის თამაში ხდება, თვით ეს შემთხვევა გამოდის შინაგან, დაფარული კანონზომიერებისადმი დამორჩილებული და მთელი საქმე ისაა, რომ ეს კანონები აღმოჩენილ იქნან (1,222). დიდ რიცხვთა კანონი სწორედ იმ კანონზომიერების არსებობაზე მიუთითებს, რომელიც დამახასიათებელია საგანთა მასისათვის, როგორც თვისებრივად განსაზღვრული მთელისათვის. ეს კანონი გვეუბნება, რომ სტატისტიკურ კვლევა-ძიებას პირდაპირ მივყავართ საგანთა მასის თვისებრიობის განმსაზღვრელ შინაგანი კანონზომიერების აღმოჩენისაკენ.

დიდ რიცხვთა კანონთან დაკავშირებით საჭიროა ყურადღება მივაქციოთ ზოგიერთ მომენტს. მაგალითად, ეს კანონი გვეუბნება, რომ ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში, ალბათობისა და სიხშირის რიცხვითი მნიშვნელობები ერთმანეთს უახლოვდება. ვთქვათ, ყუთში ყრია 50 ბურთი, აქედან 25 ბურთი შავია და 25 – თეთრი. რადგანაც ასეთ ვითარებაში ყუთიდან შავი ბურთის ამოღების ალბათობა არის ½, ამიტომ ცდათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში შესაბამისი უნდა იყოს შავი ბურთის ამოღების სიხშირეც. ე. ი. 100 ცდის შემთხვევაში დაახლოებით 50-ჯერ უნდა ამოვიდეს შავი ბურთი. დავუშვათ, ჩავატარეთ 60 ცდა და შავი ბურთი ამოვიდა 20-ჯერ. ნიშნავს თუ არა ეს იმას, რომ დარჩენილ 40 ცდაში შავი ბურთი უნდა ამოვიდეს 30-ჯერ და რომ, წინააღმდეგ შემთხვევაში, სიხშირე არ გაუტოლდება ალბათობას და დაირღვევა თითქოს დიდ რიცხვთა კანონი. ასეთი აზრი, რომელიც ითხოვს ჩატარებული ცდების შედეგთა კომპენსაციას, არ არის სწორი; უნდა გვახსოვდეს, რომ დიდ რიცხვთა კანონი ჩატარებული ცდების რიცხვით არ მოქმედებს, ანუ, როგორც ამბობენ, შემთხვევას არც ცნობიერება აქვს და არც მეხსიერება. სხვადასხვა ცდის შედეგები ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი არიან ალბათობის მხრივ. შესაძლებელია მოხდეს ისე, რომ ცდათა დიდი რაოდენობის შემდეგ სიხშირე და ალბათობა ბევრად განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. ეს შემთხვევა დიდ რიცხვთა კანონს არ ეწინააღმდეგება, რადგანაც იგულისხმება, რომ, მართალია, მცირე ალბათობით, მაგრამ ასეთი რამ სრულიად დასაშვებია.

სტატისტიკური კანონზომიერების შესწავლას დიდი ყურადღება ექცევა ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, საზოგადოებრივ მეცნიერებებში და სხვ. ამიტომ ალბათობათა თეორიას უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება. ასეთ პირობებში კი განსაკუთრებით საჭიროა ხაზი გაესვას ალბათობის ცნების ობიექტურ სტატუსს და სწორად იქნეს შეფასებული ალბათობათა თეორიის, როგორც მეცნიერული დარგის, როლი.

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ უკვე მე-19 საუკუნის დასაწყისში ევროპის ქვეყნებში სპეციალური ყურადღება ექცევა სტატისტიკური მონაცემების შეგროვებისა და დამუშავების საკითხს. მათემატიკური სტატისტიკის პრობლემათა კვლევამ, რომელსაც საფუძველი ჩაეყარა პ. ლაპლასისა (1749–1827) და კ. გაუსის (1777–1855) შრომებით, გზა გაუკაფა ალბათობათა თეორიას. პირველი მეცნიერი, რომელიც შეეცადა სტატისტიკის თეორიის შექმნას, იყო ბელგიელი ასტრონომი და ფიზიკოსი ა. კეტლე (1796–1874). მან ჩამოაყალიბა სტატისტიკის თეორიის ძირითადი დებულება იმის შესახებ, რომ სტატისტიკური კვლევის საგანს წარმოადგენს მასიური მოვლენების განმსაზღვრელი კანონზომიერება, რომელიც თავს იჩენს ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში. თუმცა მეტაფიზიკურობამ, რაც დამახასიათებელი იყო ფრანგი მატერიალისტებისათვის, თავისებური გავლენა მოახდინა კეტლეზეც და მიიყვანა იგი მექანიციზმამდე საზოგადოებრივ მოვლენათა ახსნის ასპექტში, მაგრამ მაინც უნდა აღინიშნოს, რომ პირველად სწორედ ა. კეტლემ წამოაყენა აზრი საზოგადოებრივ ცხოვრებაში ობიექტური კანონზომიერების არსებობის შესახებ და გაუსვა ხაზი სტატისტიკური კვლევის მეთოდის მნიშვნელობას ამ კანონზომიერების შესწავლის საქმეში.

კ. მარქსი და ფ. ენგელსი ყოველთვის აღიარებდნენ სტატისტიკური მეთოდების მნიშვნელობას სოციალური პროცესების კვლევის დროს. ამის გამოა სწორედ, რომ მათ ნაშრომებში სისტემატურადაა მოცემული უდიდესი სტატისტიკური მასალის ღრმა და სერიოზული ანალიზი. კ. მარქსი განსაკუთრებულ ყურადღებას აქცევდა საშუალო სიდიდეთა თვისების არსის კვლევას და დიდ რიცხვთა კანონს. იგი კარგად გრძნობდა, რომ კაპიტალიზმის პირობებში კანონზომიერება შეიძლება გამოვლენილიყო მხოლოდ საშუალო სიდიდეთა თვისებებში, როგორც გარკვეული მასიური კანონზომიერება (ტ. 20, 37-38). შემდგომში, განაზოგადა რა კ. მარქსის თეორიული მოსაზრებები, ვ. ი. ლენინი წერს, რომ აღნიშნულ პირობებში კანონზომიერება მართლაც შეიძლება გამოვლინდეს, როგორც მხოლოდ ზოგადი, მასიური კანონზომიერება, როდესაც განეიტრალებულია უკვე ესა თუ ის ცალკეული გადახრები (4, ტ. 26, 68). სწორედ ასეთი სახის კანონზომიერების არსებობას გამოხატავს დიდ რიცხვთა კანონის მოქმედება. კ.

მარქსმა თავის „კაპიტალში“ სრულიად ნათლად და არგუმენტირებულად აჩვენა, რომ საშუალო სიდიდეთა ფორმირების საფუძველს წარმოდგენს ობიექტური პროცესები და ყოველთვის, როდესაც ვაწარმოებთ საშუალო სიდიდეთა გამოთვლას, გათვალისწინებული უნდა იყოს ამ ობიექტურ პროცესთა ხასიათი.

მასიური პროცესების კანონზომიერების კვლევას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს დღეისათვის. აშკარაა, რომ ეს პროცესები ობიექტური სინამდვილის ძალზედ დიდ სფეროს მოიცავს. აღსანიშნავია ისიც, რომ დღეისათვის ისევ გრძელდება სტატისტიკური კანონზომიერების არსის სწორი ინტერპრეტირების ცდები, რაც სამყაროს განვითარების პროცესში აუცილებლობისა და მიზეზობრიობის კატეგორიათა ობიექტური საფუძვლის უარყოფაში და ბუნების მოვლენათა მხოლოდ შემთხვევითი ხასიათის აღიარებაში გამოიხატება. ასეთი პოზიცია განპირობებულია კანონზომიერების დინამიკურ ფორმასთან მიზეზობრივი კავშირის გაიგივებით და არ არის სწორი. ვ. ი. ლენინმა განიხილა ეს საკითხი თავის წიგნში „მატერიალიზმი და ემპირიოკრიტიციზმი“ და განსაკუთრებით ხაზი გაუსვა იმ გარემოებას, რომ სტატისტიკური კანონზომიერების შემთხვევაში მიზეზობრივი კავშირის არსებობის უარყოფა არ შეესაბამება ობიექტურ ვითარებას.

სტატისტიკური და დინამიკური კანონზომიერებანი ბუნებაში არსებულ კანონზომიერებათა ორ ურთიერთგანსხვავებულ ფორმას წარმოადგენს და არ არის სწორი მათი ერთმანეთზე დაყვანა. ობიექტური სინამდვილის კანონზომიერებაში არსებული ეს განსხვავება გარკვეულ ასახვას პოულობს მათემატიკურ აპარატში. ასე რომ, თუ თავის დროზე დინამიკური კავშირის შემთხვევაში, მიზეზსა და შედეგს შორის არსებული მკაცრი ფუნქციონალური მიმართების დასახასიათებლად შემოტანილ იქნა დიფერენციალური აღრიცხვა, სამაგიეროდ, სტატისტიკური კანონზომიერების შესწავლა დაიწყო ალბათობათა თეორიის საფუძველზე და ძირითად სახელმძღვანელო ცნებად ალბათობის ცნება შემოვიდა.

ს ი მ რ ა ვ ლ ე თ ა თ ე ო რ ი ი ს პ ა რ ა დ ო ქ ს ე ბ ი. მე-19 საუკუნის ბოლოდან სიმრავლეთა თეორიამ უდიდესი გამოყენება პოვა და მათემატიკოსების მხრიდან საყოველთაო აღიარება მიიღო. ამიტომ პარადოქსები, რომლებმაც თავი იჩინა სიმრავლეთა თეორიაში, საკმაოდ მოულოდნელ და უსიმოვნო ფაქტად გამოიყურებოდა. ერთ-ერთ ასეთ პარადოქსს წარმოადგენს კანტორის პარადოქსი, რომელიც მან აღმოაჩინა 1899 წელს. მისი არსი შემდგომში მდგომარეობს: ვთქვათ, გვაქვს ყველა სიმრავლეთა სიმრავლე A და მისი ყველა ქვესიმრავლე $N(A)$, მაშინ, როგორც ეს დავინახეთ $\{a,b,c\}$ სიმრავლის შემთხვევაში, A სიმრავლის სიმძლავრე $\overline{\overline{A}}$ ნაკლები იქნება $N(A)$ სიმრავლის სიმძლავრეზე, ე. ი. $\overline{\overline{N(A)}} > \overline{\overline{A}}$, ანუ ნებისმიერი სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლებია მისი ყველა ქვესიმრავლის სიმძლავრეზე. მაგრამ A

არ არის ნებისმიერი სიმრავლე, იგი არის ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე, ამიტომ $N(A)$ უნდა იყოს A-ს ნაწილი, ანდა უკიდურეს შემთხვევაში, ემთხვეოდეს მას, ე. ი. $N(A) \subseteq A$. მაგრამ, თუ $N(A)$ ნაწილია A-სი, მაშინ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მისი სიმძლავრე ნაკლები უნდა იყოს (ან, უკიდურეს შემთხვევაში, ტოლი) A -ს სიმძლავრეზე. ე. ი. გამოდის, რომ, ერთი მხრივ $\overline{\overline{N(A)}} \leq \overline{\overline{A}}$. ხოლო, მეორე მხრივ, $\overline{\overline{N(A)}} > \overline{\overline{A}}$, რაც პარადოქსული ვითარების გამომხატველია.

შემდეგი პარადოქსი აღმოაჩინა რასელმა (1902-1903 წწ.). ეს პარადოქსი განიხილავს ყველა იმ სიმრავლეთა სიმრავლეს, რომელნიც თავიანთ თავს ელემენტის სახით არ მოიცავენ. აღვნიშნოთ B-თი ყველა ასეთი სიმრავლე. შეიძლება თუ არა, რომ სიმრავლე მოიცავდეს თავის თავს ელემენტის სახით? დავუშვათ, რომ B არის თავისი თავის ელემენტი, ანუ $B\epsilon B$, ამ დაშვების თანახმად B არის B-ს ელემენტი. ე.ი. B არის ელემენტი ყველა იმ სიმრავლეთა სიმრავლისა, რომელნიც თავიანთ თავს ელემენტის სახით არ მოიცავენ, ე.ი. B არის სიმრავლე, რომელიც არ არის თავისი თავის ელემენტი, ანუ $B \notin B$. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $B\epsilon B$. მაგრამ ამით ჯერ კიდევ არა გვაქვს საქმე პარადოქსთან, რადგანაც წინააღმდეგობა, რომ $B\epsilon B$ და $B \notin B$ წარმოიშვა მხოლოდ ჩვენი იმ დაშვების საფუძველზე, რომ $B\epsilon B$, ე.ი. ჩვენი დაშვება, რომ $B\epsilon B$, მცდარია. მაშინ სწორია საწინააღმდეგო, რომ $B \notin B$. გამოვიდეთ ახლა ამ დადგენილი ფაქტიდან და მივიღოთ, რომ $B \notin B$. ეს ნიშნავს, იმას, რომ B არ არის ელემენტი ყველა იმ სიმრავლეთა სიმრავლისა, რომელნიც თავის თავს ელემენტის სახით არ მოიცავენ, ანუ B არ არის სიმრავლე, რომელიც თავის თავს ელემენტის სახით არ მოიცავს. ე.ი. B არის სიმრავლე, რომელიც თავისი თავის ელემენტია ანუ $B\epsilon B$. მაშინ კი უკვე გამოვიდა, რომ ერთი მხრივ, როგორც დავადგინეთ ადრე, $B \notin B$, ხოლო მეორე მხრივ, როგორც ახლა გამოვიდა, $B\epsilon B$, რაც პარადოქსია.

რასელმა ეს პარადოქსი პოპულარიზაციის თვალსაზრისით განიხილა შემდეგნაირად: ვთქვათ, არის სოფლელი დალაქი, რომელიც პარსავს ყველა იმათ, ვინც თავის თავს არ პარსავს. პარსავს თუ არა ეს დალაქი თავის თავს? თუ იპარსავს, მაშინ ის არ არის დალაქი, რომელიც მხოლოდ იმათ პარსავს, ვინც თავის თავს არ იპარსავს, ხოლო თუ არ იპარსავს, მაშინ ის არ არის დალაქი, რომელიც ყველას პარსავს, ვინც თავის თავს არ იპარსავს.

ანდა: ჰოლანდიაში თითოეულ მუნიციპალიტეტს ჰყავს თავისი მერი და ორ სხვადასხვა მუნიციპალიტეტს არ შეიძლება ჰყავდეს ერთი და იგივე მერი. ზოგჯერ მერი არ ცხოვრობს თავის მუნიციპალიტეტში. დავუშვათ, გამოსცეს კანონი, რომლის მიხედვითაც ყველა იმ მერმა, რომელიც არ ცხოვრობს თავის მუნიციპალიტეტში, უნდა იცხოვროს სპეციალურად გამოყოფილ ცალკე ტერიტორიაზე. დავუშვათ, რომ

ეს მერები აღმოჩნდნენ იმდენი, რომ ჰქმნიან ცალკე მუნიციპალიტეტს. სად უნდა იცხოვროს ამ მუნიციპალიტეტის მერმა?

რასელმა აჩვენა აგრეთვე, რომ მისი პარადოქსი შესაძლებელია გამოითქვას ლოგიკურ ტერმინებშიც. ასე მაგალითად, თვისებას ეწოდება „პრედიკაბელური“, თუ მას აქვს ადგილი თავისი თავის მიმართ და „ინპრედიკაბელური“, თუ არა აქვს ადგილი თავისი თავის მიმართ. მაგალითად, თვისება „აბსტრაქტული“ არის პრედიკაბელური, რადგანაც იგი არის აბსტრაქტული, მაგრამ თვისება „კონკრეტული“ არ არის კონკრეტული და ამიტომ არის ინპრედიკაბელური. როგორია თვისება „ინკრედიკაბელური?“

მალე აღმოჩენილ იქნენ სხვა ტიპის პარადოქსებიც, დაიწყო მათი თავიდან აცილების ცდები. მეცნიერები სხვადასხვა გზით ცდილობდნენ პარადოქსების პრობლემის გადაჭრას. საჭირო გახდა სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლების კვლევა. პირველად მათემატიკის საფუძვლების კვლევას ყურადღება მიექცა არაევკლიდური გეომეტრიის აღმოჩენის შემდეგ და, როგორც ვნახეთ, მაშინვე ყურადღების ცენტრში დადგა მათემატიკური თეორიის აქსიომატიზაციის საკითხი. მეცნიერული თეორიის აქსიომატიზაცია ყოველთვის იძლევა შესაბამისი მასალის მკაცრ ლოგიკურ დალაგებას და უდიდეს როლს ასრულებს თეორიის როგორც ფორმალური, ისე შინაარსობრივი მხარეების რაფინირებაში. ასე რომ, გეომეტრიის შემთხვევაში აქსიომატიზაციის მეთოდმა მათემატიკოსები კარგ შედეგებამდე მიიყვანა. ამიტომ იყო, რომ სიმრავლეთა თეორიასთან დაკავშირებით შექმნილი პარადოქსული ვითარების თავიდან აცილების მიზნით პირველ რიგში ისევ აქსიომატიზაციის მეთოდს მიმართეს. დაიწყო სერიოზული ცდები, რომელნიც მიზნად ისახავდნენ სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიზაციას. ცდილობდნენ ისე აეგოთ სიმრავლეთა თეორია, რომ იგი თავისუფალი ყოფილიყო ყოველგვარი წინააღმდეგობებისაგან.

სიმრავლეთა თეორიის ჩამოყალიბების შემდეგ, ნახევარი საუკუნის მანძილზე გრძელდებოდა მუშაობა ამ მიმართულებით. აშკარა გახდა, რომ პარადოქსები, რომელთაც სიმრავლეთა თეორიასთან მიმართებაში იჩინეს თავი, არ ატარებდნენ უბრალო ლოგიკური შეცდომის ხასიათს, არამედ ეხებოდნენ სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლებს და მოითხოვდნენ მათ სერიოზულ გადასინჯვას. პირველ რიგში ყურადღების ცენტრში დადგა „სიმრავლის“ ცნების ანალიზის საკითხი. მაგალითად, იმისათვის, რომ არსებობდეს საერთოდ სიმრავლეთა თეორია, საჭიროა გვქონდეს ისეთი თეორემები, რომელნიც სამართლიანი იქნებიან ყველა სიმრავლისათვის. ყველა სიმრავლე კი, სიმრავლის კანტორისეული განმარტებით, თვითონ წარმოადგენს ახალ სიმრავლეს; ანუ უნდა ვილაპარაკოთ „ყველა სიმრავლის სიმრავლეზე“. ეს უკანასკნელი კი წინააღმდეგობრივი ხასიათის ცნებაა და ამდენად

არ შეიძლება მისი ხმარება. ე.ი. გამოდის, რომ საჭიროა სიმრავლის ცნების კანტორისეული განმარტების დაზუსტება. ამასთან დაკავშირებით მათემატიკოსები შეეცადნენ ისე აეგოთ სიმრავლეთა თეორია, რომ სიმრავლის ცნებაზე დადებული ყოფილიყო შეზღუდვები. რომელნიც გამორიცხავდნენ უსასრულო სიმრავლეებს და ამ გზით თავიდან აიცილებდნენ პარადოქსებსაც.

სიმრავლეთა აქსიომატური თეორია პირველად ააგო ცერმელომ (1908), ხოლო შემდგომ ფრენკელის (1922-1925), სკოლის (1922-1929), ნეიმანის (1925-1928), ბერნაისის (1937-1954) და სხვათა მიერ თანდათანობით მას მიეცა უფრო და უფრო სრულყოფილი სახე.

სიტუაცია, რომელიც შეიქმნა სიმრავლეთა თეორიაში აქსიომატური მეთოდის გამოყენებისას, გარკვეულად განსხვავებული აღმოჩნდა იმისაგან, რასაც ჰქონდა ადგილი გეომეტრიის შემთხვევაში. ასე მაგალითად, გეომეტრიული მასალის განხილვის დროს (მას შემდეგ უკვე, როდესაც აღმოჩენილ იქნენ არაევკლიდური გეომეტრიები) ითვლებოდა, რომ აქსიომათა ესა თუ ის სისტემა გამოჰყოფდა სივრცის ამა თუ იმ გარკვეულ ტიპს: ევკლიდურს ან არაევკლიდურს; ეს კი საშუალებას აძლევდა მეცნიერს ემსჯელა სივრცის ამ ტიპისათვის დამახასიათებელ ზოგად თვისებებზე. თუ ამის შემდეგ ფორმალიზებულ აქსიომათა სისტემაში აღმოჩნდებოდა რაიმე წინააღმდეგობა, ეს იქნებოდა მაჩვენებელი მხოლოდ იმისა, რომ პოსტულირებული იყო თვისებათა რაღაც დაუშვებელი კომბინაცია. სიმრავლეთა თეორიის შემთხვევაში კი ითვლებოდა, რომ მათემატიკოსებს საქმე ჰქონდათ ობიექტთა ისეთ სისტემებთან, რომელნიც გენეტიკურად იყვნენ დაფუძნებული მათი სტრუქტურის აღწერისათვის შემოტანილ განსაზღვრებებზე; ე.ი. თეორემები, რომლებთანაც ჰქონდათ საქმე ამ დროს, გამოხატავდნენ სწორედ ამ ობიექტთა თვისებებსა და სტრუქტურას. აქედან გამომდინარე, სრულიად გაუგებარი იყო უკვე ის წინააღმდეგობანი, რომელთაც სიმრავლეთა თეორიაში იჩინეს თავი. პირველი აზრი, რომელიც ამ პარადოქსალური ვითარების ახსნასთან დაკავშირებით მათემატიკოსებს შორის გაჩნდა, იყო ის, რომ გამოერკვიათ, ხომ არ ჰქონდა ამ შემთხვევაში ადგილი ლოგიკური ხასიათის რაიმე შეცდომას. აღსანიშნავია, რომ ეს აზრი, საკითხის სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიზაციის ასპექტში დაყენებით, საბოლოოდ მაინც არ არის მოხსნილი. ამასთან დაკავშირებით წინა პლანზე დგებიან მათემატიკის საფუძვლების კვლევისა და მათემატიკური ჭეშმარიტების ბუნების გარკვევის საკითხები, რომელნიც თავის მხრივ სცილდებიან უკვე მხოლოდ მათემატიკის ფარგლებს და ფილოსოფიურ ასპექტსაც მოიცავენ.

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსებში ყველგან გამოყენებულია ე.წ. არაპრედიკატული განსაზღვრებანი. ამბობენ, რომ განსაზღვრება

არაპრედიკატულია, თუ მაგალითად რაიმე A სიმრავლე და a ობიექტი განსაზღვრული არიან ისე, რომ, ერთი მხრივ, a არის A სიმრავლის ელემენტი, ხოლო, მეორე მხრივ, a-ს განსაზღვრება გამომდინარეობს A-დან. ასევე არაპრედიკატულ განსაზღვრებებთან გვექნება საქმე მაშინაც, თუ, მაგალითად, რაიმე N თვისება აქვს რაღაც a ობიექტს, ხოლო a ობიექტის განსაზღვრება, თავის მხრივ, დამოკიდებულია ამ N თვისებაზე. ე.ი. არაპრედიკატული განსაზღვრებისათვის დამახასიათებელია, რომ ის, რაც ამ გზით უნდა განისაზღვროს, თვითონვე მონაწილეობს ამ განსაზღვრებაში. სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსებში საქმე გვაქვს სწორედ ასეთი ტიპის განსაზღვრებებთან. ასე მაგალითად, რასელის პარადოქსში ჯერ ყველა სიმრავლეთა სიმრავლეს (M) ვყოფთ ორ ნაწილად (M_1 და M_2): ისეთნი, რომელნიც მოიცავენ თავიანთ თავს ელემენტის სახით (M_1) და ისეთნი, რომელნიც არ მოიცავენ თავიანთ თავს ელემენტის სახით (M_2), ამის შემდეგ კი განვიხილავთ M_1 სიმრავლეს ისევ M სიმრავლეში და ვსვამთ კითხვას იმის შესახებ, თუ M-ის რომელ ნაწილს მიეკუთვნება იგი. ანალოგიურ ვითარებებთან გვაქვს საქმე სიმრავლეთა თეორიის სხვა პარადოქსების შემთხვევაშიც.

ა. პუანკარე თვლიდა, რომ სწორედ არაპრედიკატული განსაზღვრებანი ქმნიან პარადოქსულ სიტუაციებს სიმრავლეთა თეორიაში. ამავე პოზიციაზე იდგა ძირითადში ბ. რასელიც. მაგრამ საქმე იმაშია, რომ არაპრედიკატულ განსაზღვრებებს უდიდესი მნიშვნელობა აქვთ მათემატიკური ანალიზის სფეროში და ამდენად მათემატიკის სრული განთავისუფლება მათგან ყოვლად შეუძლებელია. ამავე დროს, არ არსებობს არავითარი რეალური საფუძველი იმისა, რომ არაპრედიკატული განსაზღვრებანი, რომელნიც სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსებში გვხვდებიან, გამოყოფილნი იქნან საერთოდ არაპრედიკატული განსაზღვრებებიდან რაიმე განსაკუთრებული ნიშნის მიხედვით. ე.ი. ერთი მხრივ ითვლება, რომ არაპრედიკატული განსაზღვრებანი არიან პარადოქსების მიზეზი და საჭიროა ამიტომ მათემატიკიდან მათი განდევნა, ხოლო მეორე მხრივ ფაქტია ისიც, რომ ამ განსაზღვრებებს უდიდესი როლი აქვთ მათემატიკურ ანალიზში. ბუნებრივია, ასეთ პირობებში დაიბადა აზრი აეგოთ მათემატიკური ანალიზი ისე, რომ არ ყოფილიყო მასში გამოყენებული არაპრედიკატული განსაზღვრებანი. მნიშვნელოვანი შედეგები ამ მიმართულებით მუშაობისას მიიღო ვეილმა, რომელმაც შეძლო არაპრედიკატული განსაზღვრებების გამოყენების გარეშე აეგო მათემატიკური ანალიზის მნიშვნელოვანი ნაწილი.

მათემატიკის დაფუძნების ცდები მიმდინარეობდა სამი ურთიერთ-განსხვავებული მიმართულებით: ლოგიცისტური სკოლა, რომელიც შეიქმნა ინგლისში და რომლის წარმომადგენლებიც იყვნენ რასელი და უაიტხედი,

ინტუიციონისტური სკოლა ჰოლანდიაში (ბრაუერი) და ფორმალისტური ანუ აქსიომატური სკოლა, რომელსაც საფუძველი ჩაუყარა ჰილბერტმა (გერმანია).